

**Применение метода конечных разностей  
для расчета распределений  
электрического и магнитного полей  
световых волн в диэлектрических  
волноводах**

Выполнена  
студенткой группы ФРМ-702-О  
Карина В.Д.  
Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент кафедры ЭФир  
Болецкая Т.К.

**Цель работы – изучение метода конечных разностей.**

**Для достижения этой цели нужно решить следующие задачи:**

- Изучить литературу, посвященную методу конечных разностей.
- Написать программы для расчета напряженностей электрического и магнитного полей волны, распространяющейся в плоскопараллельном слое, характеристики которого зависят только от одной координаты при различных граничных условиях.

Первое уравнение Максвелла:

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \Delta \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{pmatrix} = -\vec{a}_y \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (1)$$

Второе уравнение Максвелла:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \Delta \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \end{pmatrix} = \vec{a}_z \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2)$$

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (4)$$

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta_x, q\Delta_t) = E_z^q [m] \quad (5)$$

$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta_x, q\Delta_t) = H_y^q [m] \quad (6)$$

$\Delta_x$  – шаг по координате

$\Delta_t$  – шаг по времени

Индекс  $m$  соответствует пространственному шагу

Индекс  $q$  соответствует временному шагу

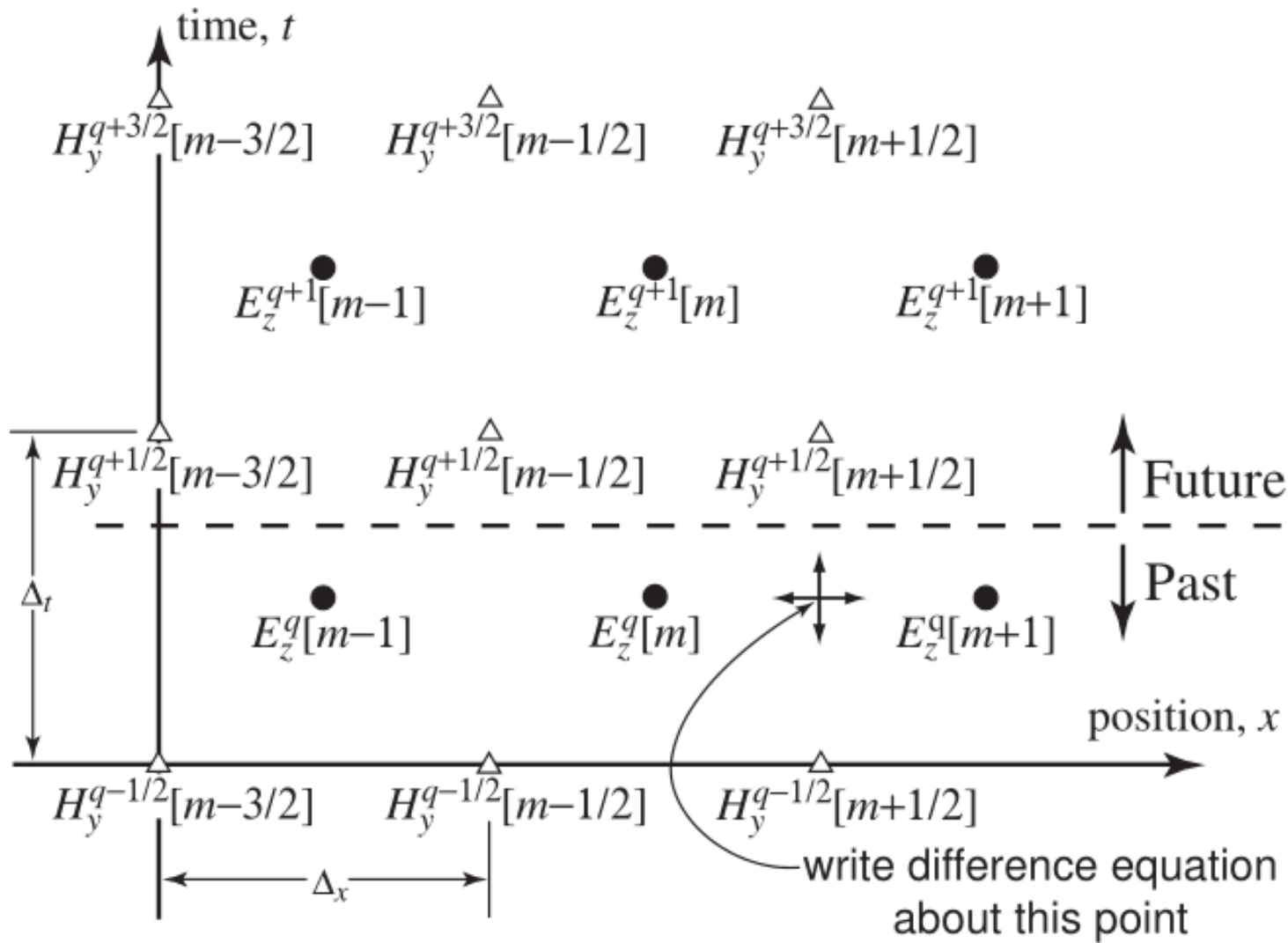


Рисунок 1: Расположение узлов электрического и магнитного полей в пространстве и времени. Узлы электрического поля показаны в виде кругов, узлы магнитного поля отмечены треугольниками. Отмечена точка, вблизи которой записывается разностное уравнение для  $H_y$ .

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (3) \quad \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (4)$$

Уравнения эволюции и для электрического и магнитного полей:

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{\mu\eta_0} S_c (E_z^q [m+1] - E_z^q [m]) \quad (7)$$

$$E_z^{q+1} [m] = E_z^q [m] + \frac{\eta_0}{\varepsilon} S_c \left( H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m - \frac{1}{2} \right] \right) \quad (8)$$

$$S_c = \frac{c\Delta_t}{\Delta_x} - \text{число Куранта}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} - \text{импеданс вакуума}$$

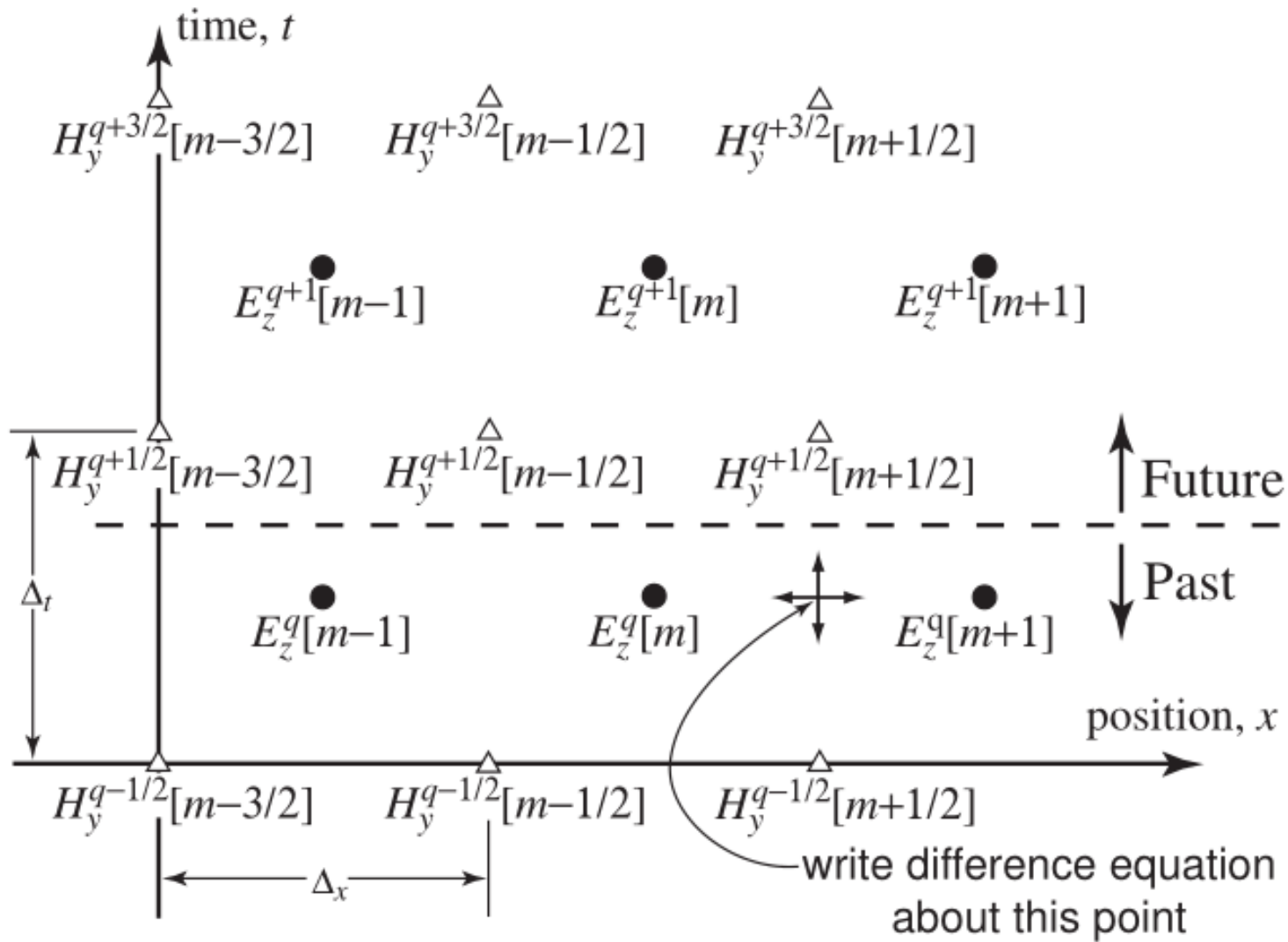


Рисунок 1: Расположение узлов электрического и магнитного полей в пространстве и времени. Узлы электрического поля показаны в виде кругов, узлы магнитного поля отмечены треугольниками. Отмечена точка, вблизи которой записывается разностное уравнение для  $H_y$ .

$$c\Delta_t \leq \Delta_x$$

$c$  – электродинамическая постоянная или скорость электромагнитных волн в вакууме

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{\mu\eta_0} S_c (E_z^q [m+1] - E_z^q [m]) \quad (7)$$

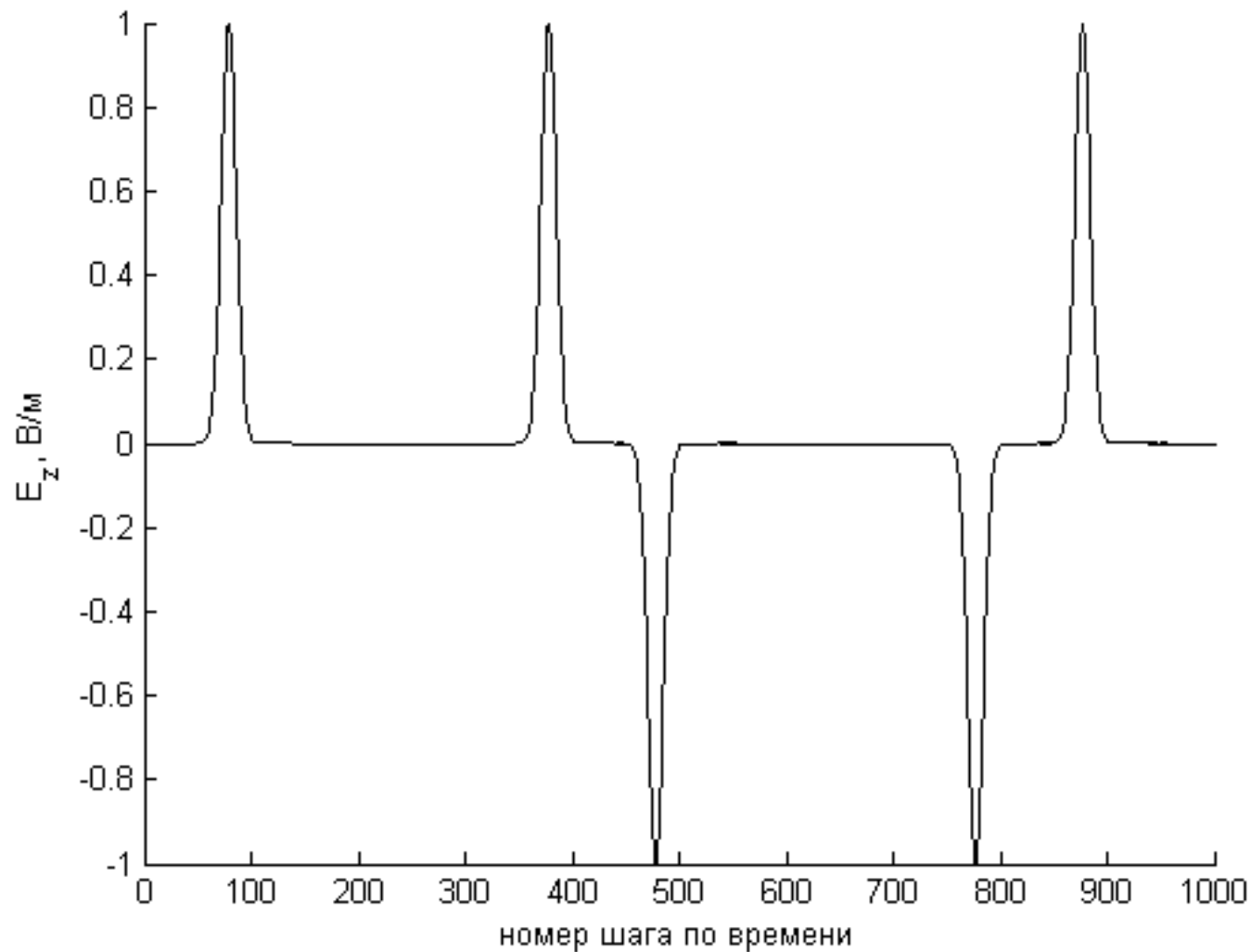
$$E_z^{q+1} [m] = E_z^q [m] + \frac{\eta_0}{\varepsilon} S_c \left( H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m - \frac{1}{2} \right] \right) \quad (8)$$

$$E_z^q [m] = e^{-(q-q_0)^2 \Delta_t^2 / Q_0^2} \quad (9)$$

$q_0\Delta_t$  – задержка для узла с номером  $m$ ,  $Q_0$  – ширина импульса



$$q_0 = 30, Q_0 = 10\Delta_t, m = 1$$



*Рисунок 2. График зависимости напряженности электрического поля в точке  $50\Delta_x$  от времени. Источник поля на левом краю слоя.*

$$q_0 = 30, Q_0 = 10\Delta_t, m = 1$$

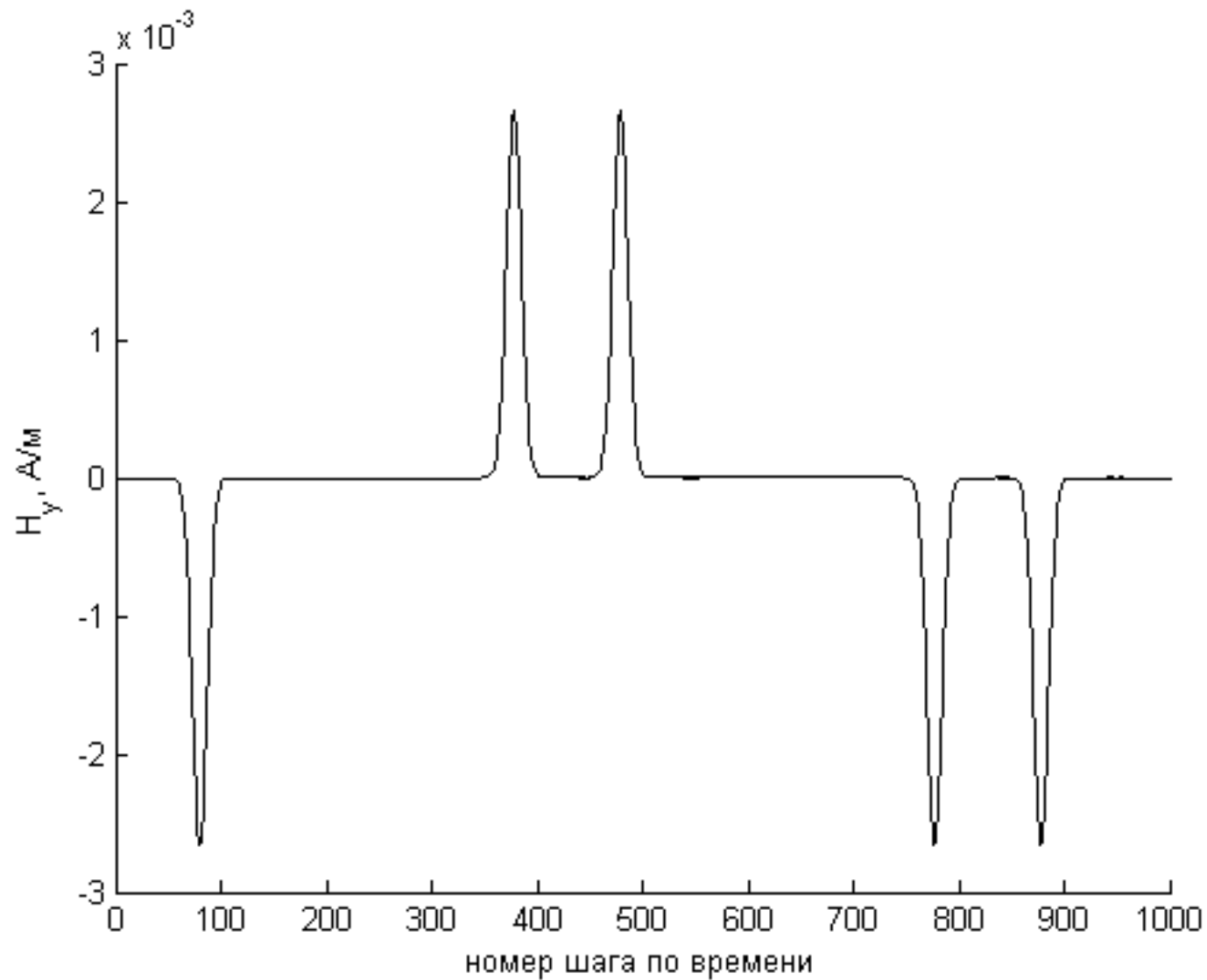
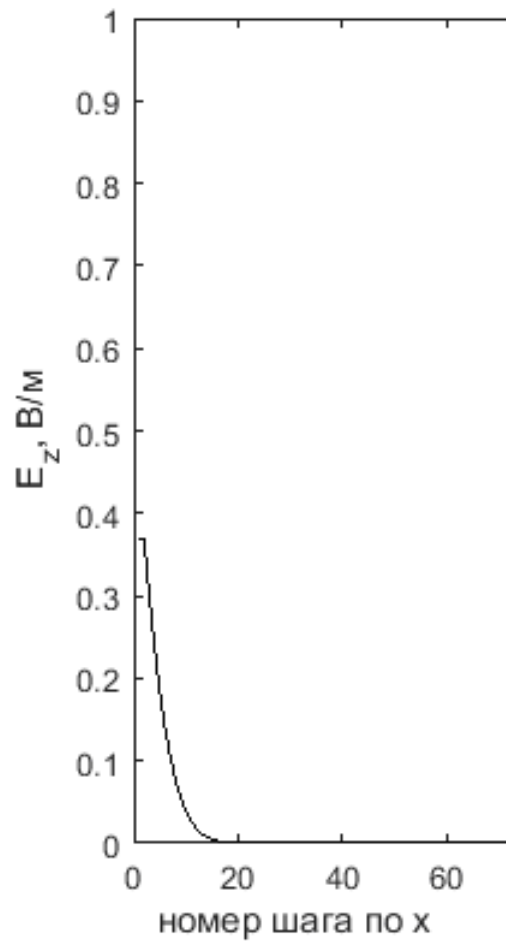
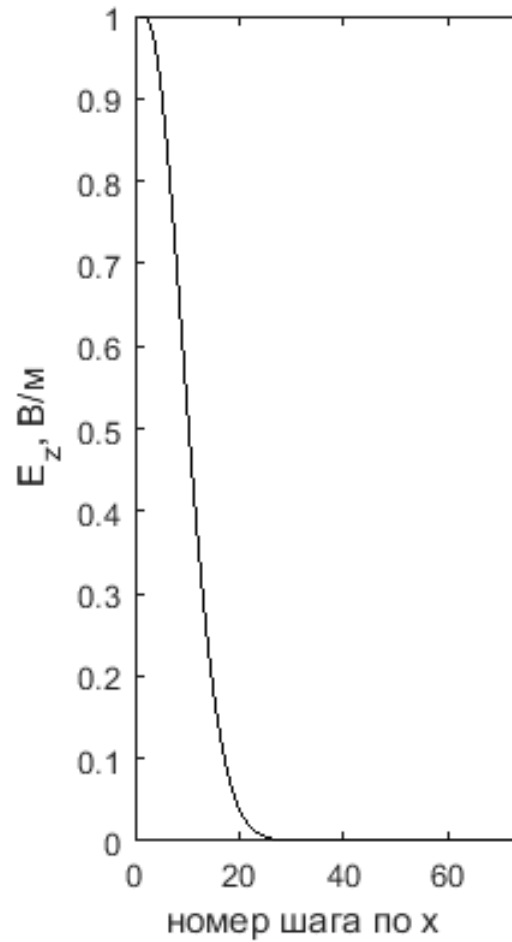


Рисунок 3. График зависимости напряженности магнитного поля в точке  $50\Delta_x$  от времени. Источник поля на левом краю слоя.

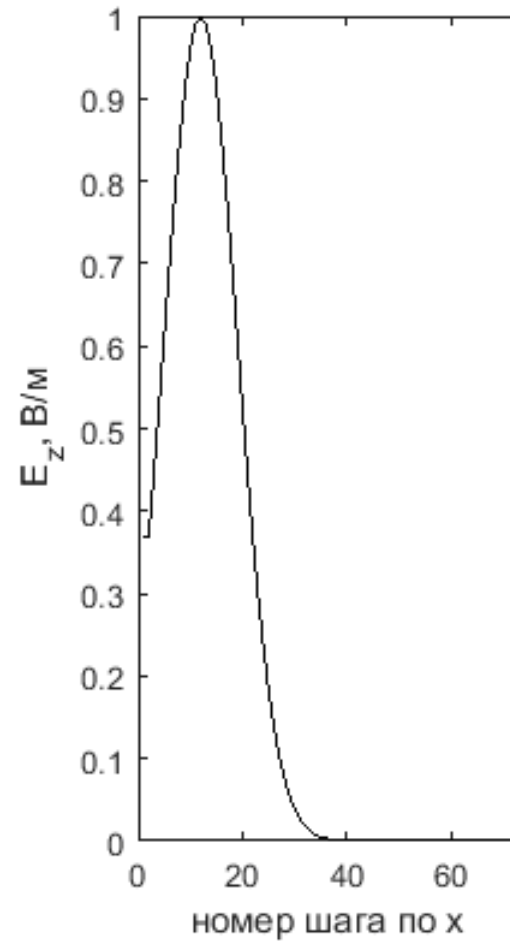
$$q_0 = 30, Q_0 = 10\Delta_t, m = 1$$



а



б



в

Рисунок 4. Графики зависимости напряженности электрического поля в фиксированный момент времени в зависимости от  $x$ . Моменты времени а)  $20\Delta_t$ , б)  $30\Delta_t$ , в)  $40\Delta_t$ .

Источник поля на левом краю слоя.

$$q_0 = 30, Q_0 = 10\Delta_t, m = 50$$

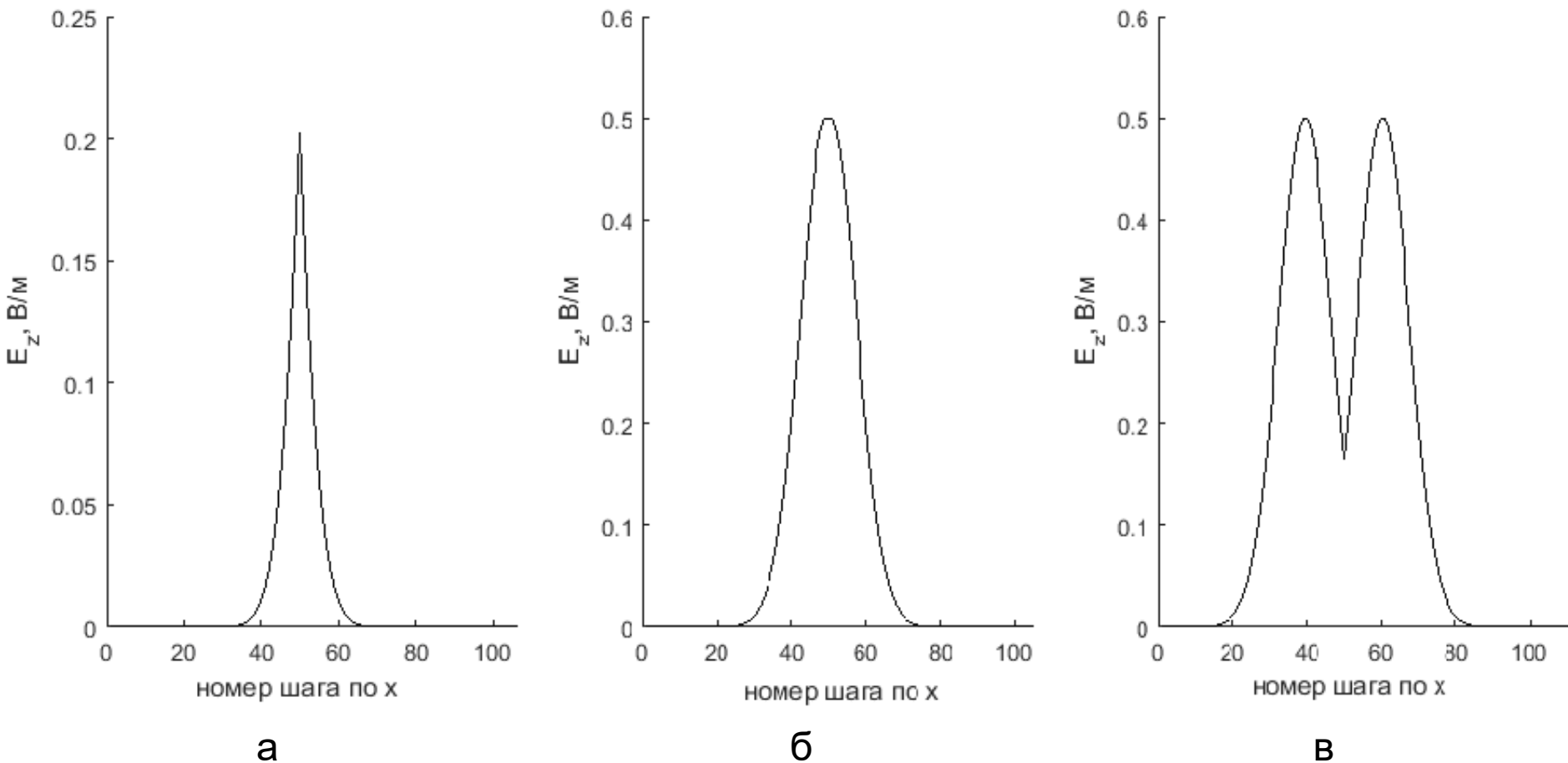


Рисунок 5. Графики зависимости напряженности электрического поля в фиксированный момент времени в зависимости от  $x$ . Моменты времени а)  $20\Delta_t$ , б)  $30\Delta_t$ , в)  $40\Delta_t$ .

Источник поля внутри слоя в плоскости  $x = 50\Delta_x$ .

$q_0 = 30, Q_0 = 10\Delta_t, m = 50$  (источник внутри слоя)

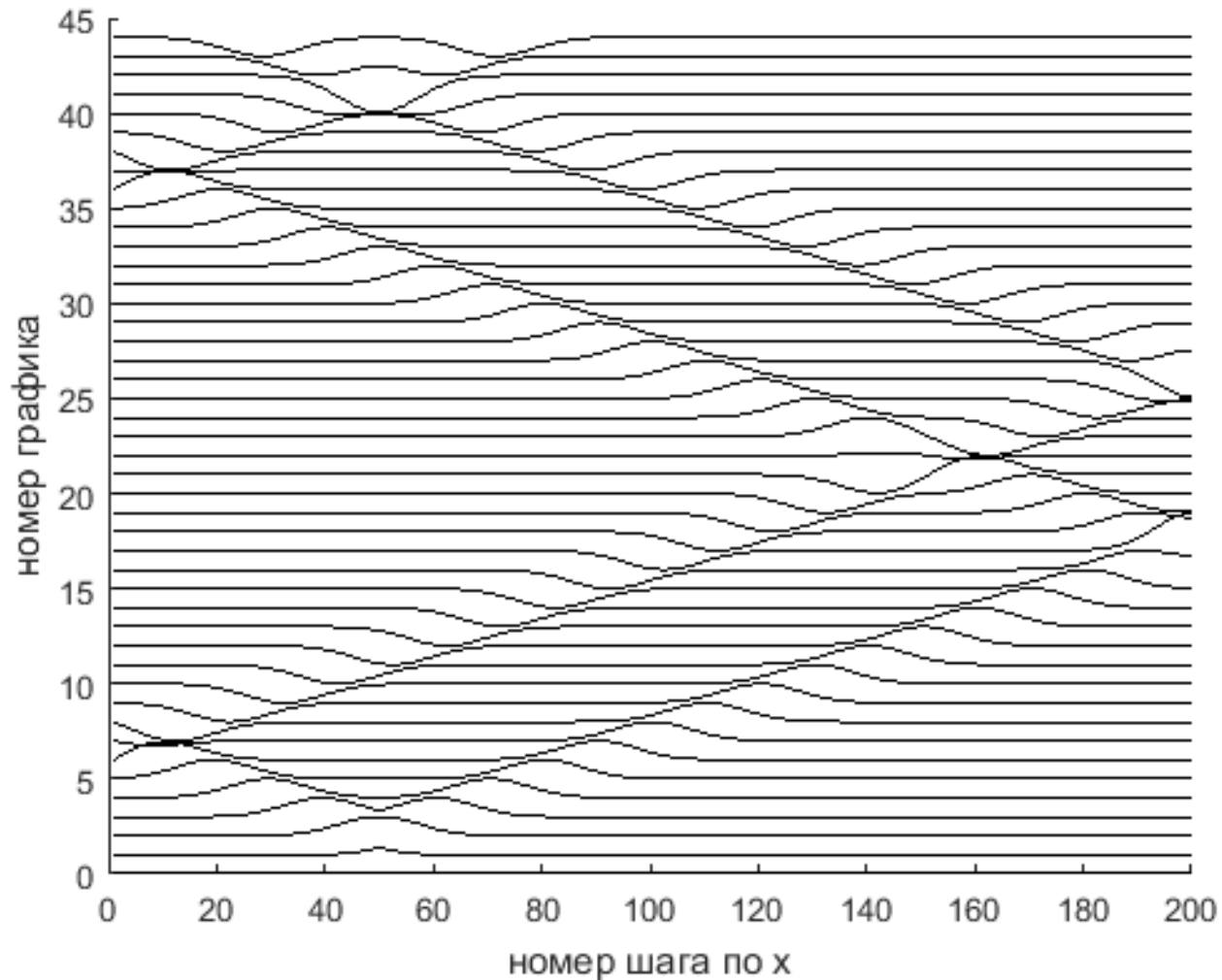
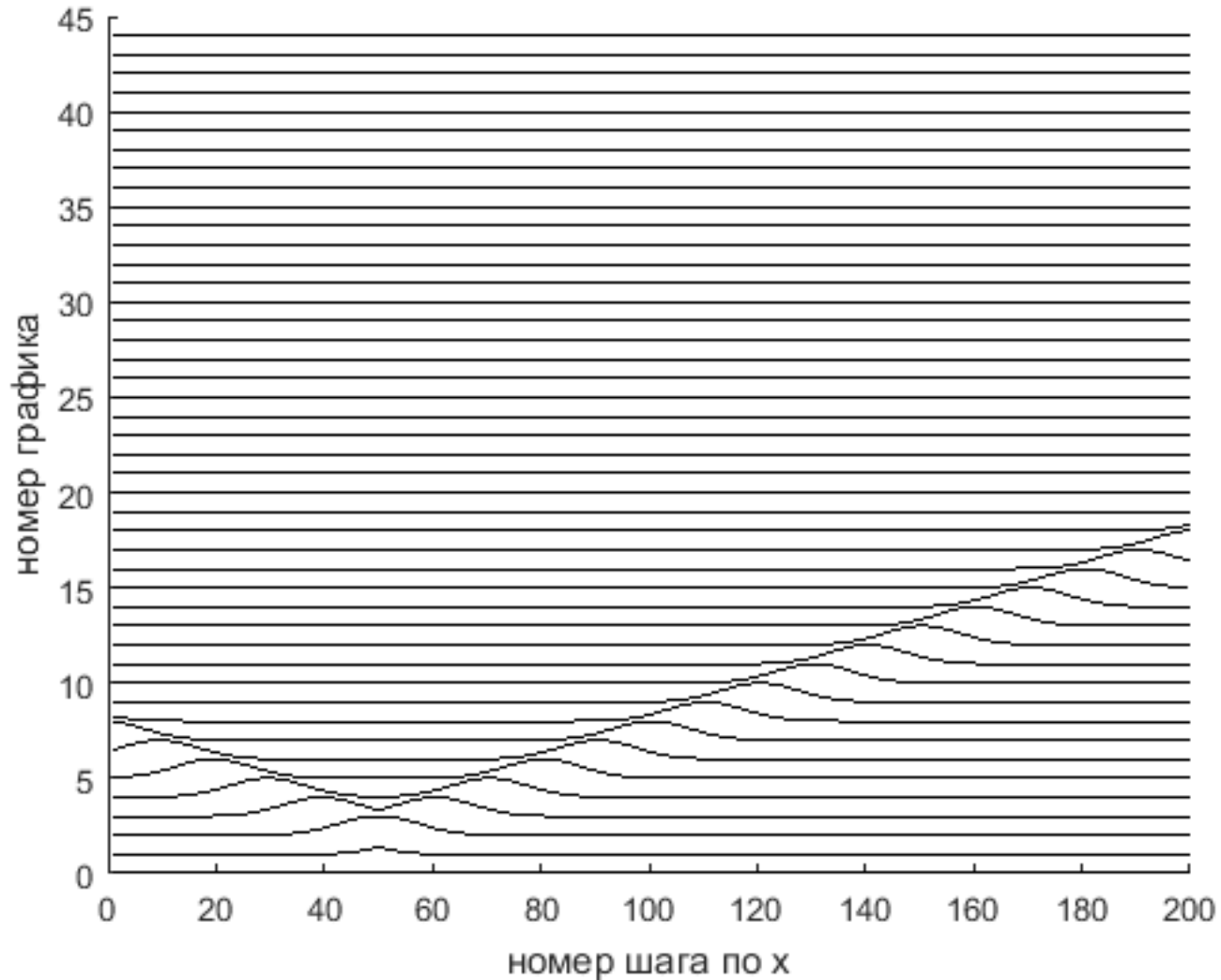


Рисунок 6. Графики  $E_z$  в зависимости от координаты для нескольких моментов времени (моменты времени отличается на 10 временных шагов). Границы слоя отражающие.

*Граничные условия АВС (Absorbing boundary conditions) при  $S_c = 1$*



*Рисунок 7. Графики  $E_z$  в зависимости от координаты для нескольких моментов времени (моменты времени отличается на 10 временных шагов). Границы слоя поглощающие.*

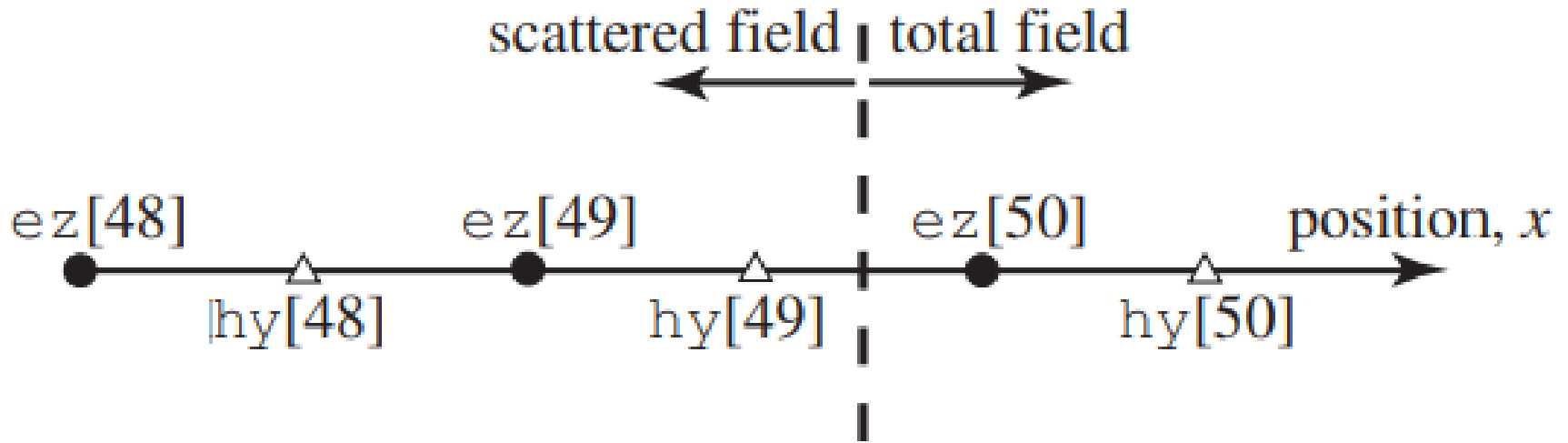


Рисунок 8. Элементы массивов электрического поля  $ez$  и магнитного поля  $hy$  в компьютерной программе вблизи границы полного поля и рассеянного поля. Рассеянное поле находится слева от границы, а полное поле справа.

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{\mu\eta_0} S_c (E_z^q [m+1] - E_z^q [m]) \quad (7)$$

$$hy[49] = H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ 49 + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[ 49 + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} (E_z^q [50] - E_z^q [49]) - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} e^{-(q-q_0)^2 \Delta_t^2 / Q_0^2} \quad (10)$$

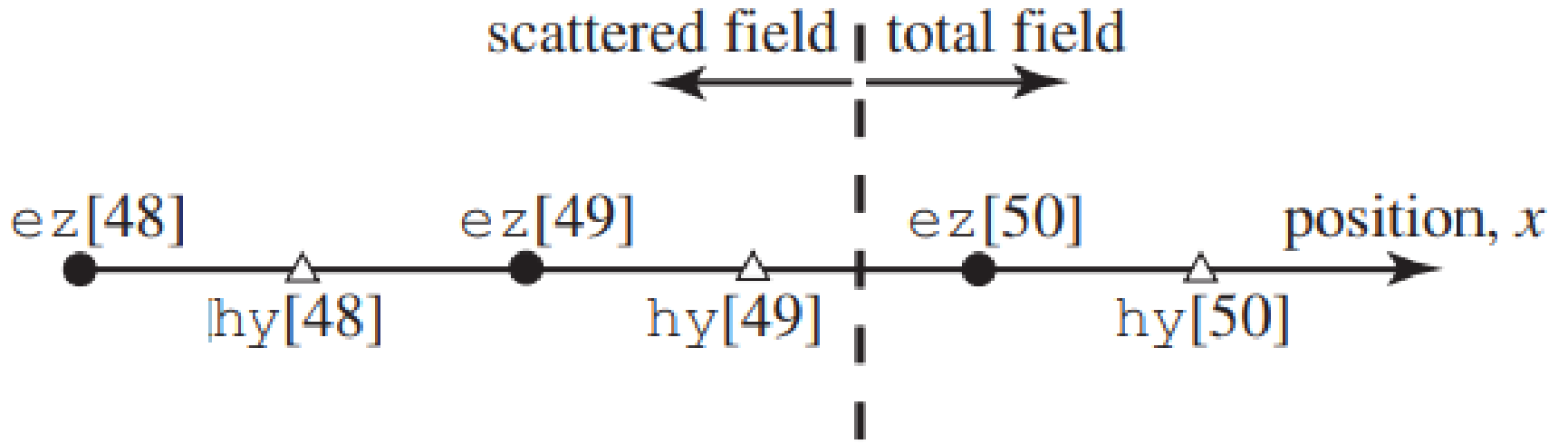


Рисунок 8. Элементы массивов электрического поля  $ez$  и магнитного поля  $hy$  в компьютерной программе вблизи границы полного поля и рассеянного поля. Рассеянное поле находится слева от границы, а полное поле справа.

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\eta_0}{\varepsilon} S_c \left( H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m - \frac{1}{2} \right] \right) \quad (8)$$

$$ez[50] = E_z^{q+1}[50] = E_z^q[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ 50 + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ 50 - \frac{1}{2} \right] \right) + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{\eta} e^{-\left( q + \frac{1}{2} - q_0 + \frac{1}{2} \right)^2 \Delta_t^2 / Q_0^2} \quad (11)$$



## Граничные условия TFSF-условия (Total Field /Scattered Field).

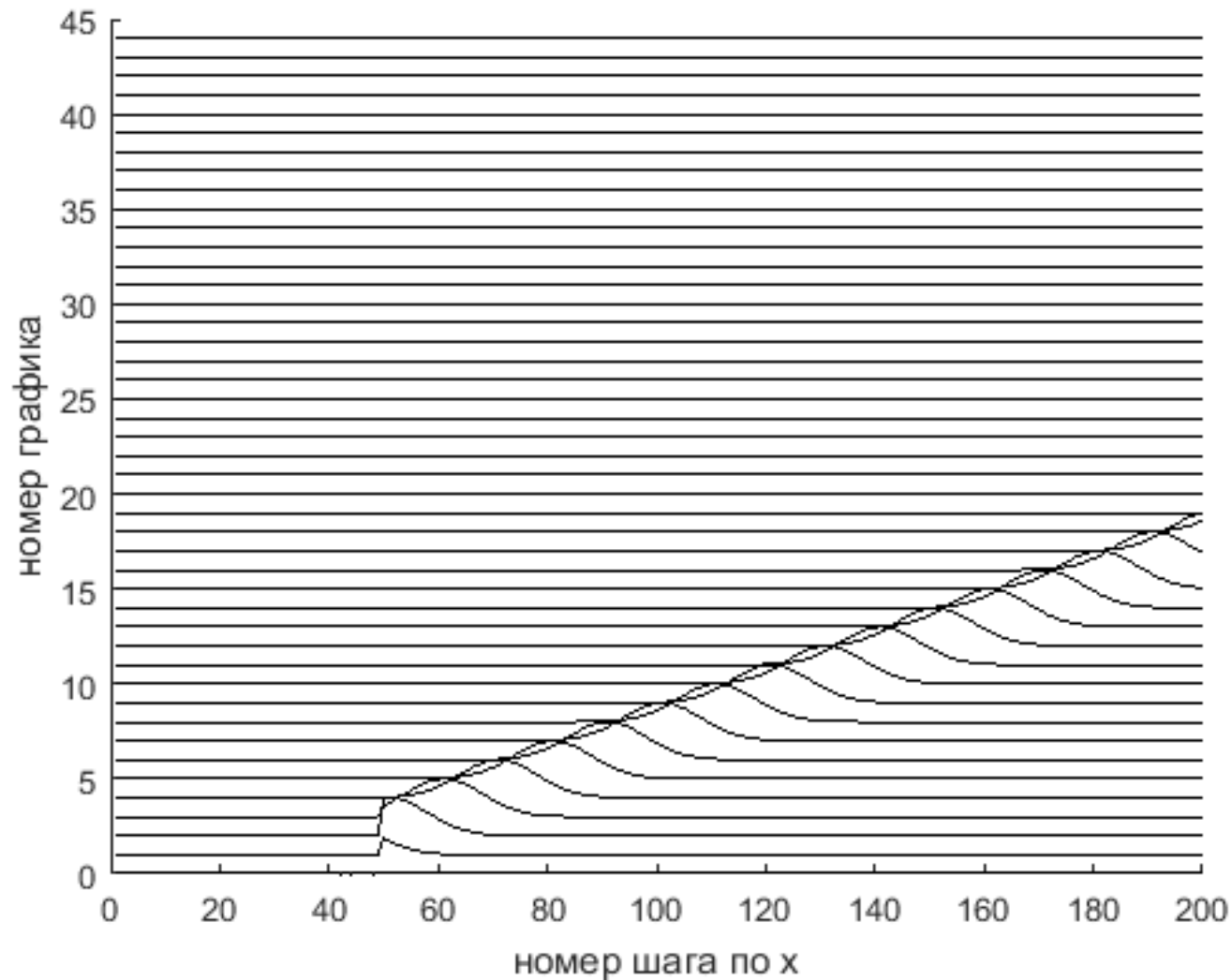


Рисунок 9. Графики  $E_z$  в зависимости от координаты для нескольких моментов времени (моменты времени отличаются на 10 временных шагов). Границы TFSF находятся между узлами  $h_y$ [49] и  $e_z$ [50].

# Заключение

В ходе выполнения работы

- изучен метод конечных разностей;
- написаны программы для расчета напряженностей электрического и магнитного полей волны, распространяющейся в плоскопараллельном слое, характеристики которого зависят только от одной координаты при различных граничных условиях.
- В дальнейшем предполагается выполнить расчеты методом конечных разностей напряженностей электрического и магнитного полей волн, распространяющихся в диэлектрических волноводах со сложной геометрией.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984. 512 с.
2. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. М.: Мир, 1980. 656 с.
3. Schneider J.B. Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method. 2014. 403 с.