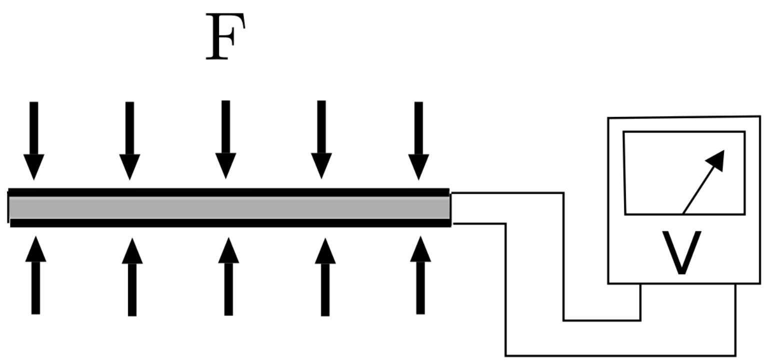
А.С. Юрков

Флексоэлектричество

2014г.

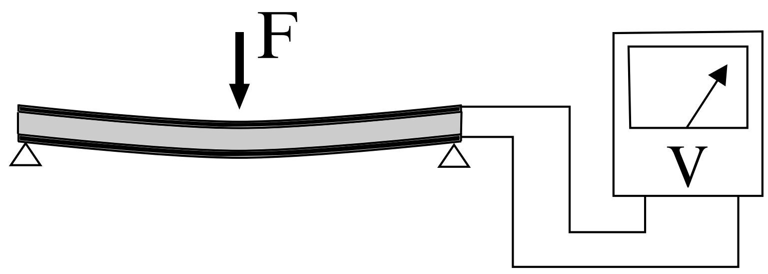
Пьезоэлектрический эффект:

$$P_i \sim u_{jk}$$



Флексоэлектрический эффект:

$$P_i \sim \frac{\partial u_{jk}}{\partial x_l}$$



Флексоэффект как нелокальный пьезоэффект

$$P_i(\mathbf{r}) = \int d_{ijk}(\mathbf{r}')u_{jk}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

$$u_{jk}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \approx u_{jk}(\mathbf{r}) + u_{jk,l}(\mathbf{r})(-r_l') + \ldots$$

Обозначение: $u_{jk,l} = \frac{\partial u_{jk}}{\partial r_l}$

$$P_i(\mathbf{r}) \approx u_{jk}(\mathbf{r}) \int d_{ijk}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' + u_{jk,l}(\mathbf{r}) \int d_{ijk}(\mathbf{r}')(-r_l')d^3\mathbf{r}' + \ldots$$

Исторический обзор

Ранние теоретические работы

В.С. Машкевич, К.Б. Толпыго, ЖЭТФ **32**, 520 (1957)

К.Б. Толпыго, ФТТ **4**, 1765 (1962)

Первое указание на возможную связь между градиентом деформации и поляризацией в акустической волне для структур типа алмаза.

Ш.М. Коган, ФТТ **5**, 2829 (1963)

R.D. Mindlin, Int. J. Solids Struct. **4**, 637 (1968)

Первые работы по феноменологической теории.

P. Harris, J. Appl. Phys. **36**, 739 (1965)

A. Askar, P.C. Lee, A.S. Cakmak, Phys. Rev. **B 1**, 3525 (1970)

Микроскопические расчеты в рамках динамики решетки.

В.Л. Инденбом, Е.Б. Логинов, М.А. Осипов, Кристаллография **26**, 1157 (1981)

Первая попытка рассмотреть конечное тело, введен термин "флексоэлектричество".

A.K. Тагантцев, ЖЭТФ **88**, 2108 (1985)

A.K. Tagantsev, Phys. Rev. **B 34**,5883 (1986)

A.K. Таганцев, УФН **152**, 423 (1987)

Ранние экспериментальные работы

И.С. Желудев, Czech. J. Phys. Ser. B **16**, 368 (1966)

Э.В. Бурсиан, О.И. Зайковский, ФТТ **10**, 1121 (1968)

Э.В. Бурсиан, О.И. Зайковский, К.В. Макаров, Изв. АН СССР Сер. Физ. **33**, 1098 (1969)

Э.В. Бурсиан, Н.Н. Трунов, ФТТ **16**, 1187 (1974)

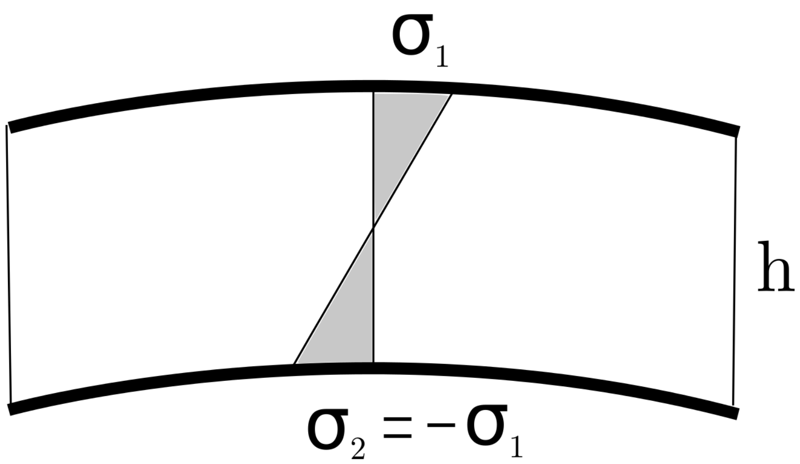
J.D. Axe, J. Harada, G. Shirane, Phys. Rev. **B 1**,1221 (1970)

Рост числа публикаций в последние годы

Из P.V. Yudin, A.K. Tagantsev. Nanotechnology 24, 432001 (2013)

См. Figure 1 в статье

Зависимость градиента от масштаба



$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{2\sigma_1}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

В наномасштабе флексоэлектрический эффект становится сравнимым с пьезоэффектом

Влияние изгиба на поляризацию наноконденсаторов

A. Gruverman et al, Appl. Phys. Lett. **83**, 728 (2003)

См. FIG.1 в статье

"Искуственный пьезоэлектрик"предложенный в работе

J. Fousek, L.E. Cross, D.B. Litvin, Mater. Lett. **39**, 287 (1999)

См. Figure 1 в статье

Влияние флексоэлектричества на структуру доменной стенки в сегнетоэлектрике

P.V. Yudin et al, Phys. Rev. **B 86**, 134102 (2012)

См. Figure 5 и Figure 6 в статье

Последние обзоры по сегнетоэлектричеству

P. Zubko, G. Catalan, A.K. Tagantsev, Annu. Rev. Matter. Res. **43**, 387 (2013)

P.V. Yudin, A.K. Tagantsev, Nanotechnology **24**, 432001 (2013)

T.D. Nguyen et al, Adv. Matter. **25**, 946 (2013)

Феноменологическая теория флексоэлектричества

Описывается вкладом в термодинамический потенциал вида:

$$F_{flx} = \frac{1}{2} f_{ijkl} \left(u_{ij} \frac{\partial P_k}{\partial x_l} - P_k \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

Этот вклад приводит к дополнительному слагаемому в механических напряжениях:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{kl} + f_{ijkl} \frac{\partial P_k}{\partial x_l}$$

и дополнительному слагаемому в выражении для равновесной поляризации:

$$\chi_{ij}^{-1} P_j = E_i + f_{ijkl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_j}$$

Проблема.

Означает ли все это, что при учете флексоэффекта однородная поляризация не вызывает деформации тела, как считается в следующих работах?

1. L.E. Cross, J.Mater. Sci. **41**, 53 (2006)

2. B.Chu, W.Zu, N.Li, L.E.Cross, J.Appl.Phys **106**, 104109 (2009)

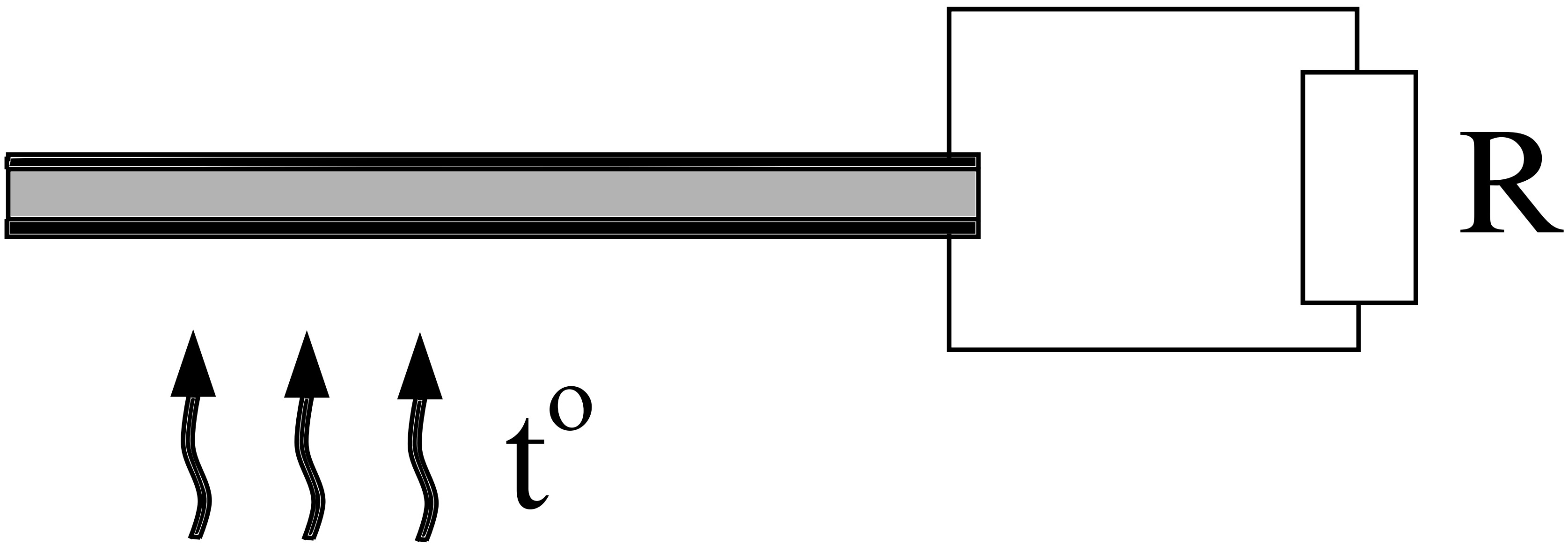
Возможен ли датчик механических перемещений, не являющийся актуатором?

Почему это проблема?

1. Согласно общим термодинамическим соотношениями Онзагера любая матрица обобщенных восприимчивостей должна быть симметрична (эрмитова в нестационарном случае – тривиальное следствие формулы Кубо).

2. Если возможен датчик, не являющийся актуатором, то возможен вечный двигатель.

Как сделать вечный двигатель второго рода, имея датчик, не являющийся актуатором?



Как разрешить парадокс?

1. A.K.Tagantsev, A.S.Yurkov, J. Appl. Phys. **112**, 044103 (2012). Прямые вариационные вычисления изгиба *однородно поляризованной* пластинки.

$$u_{11} = u_{22} = zG; \quad u_{33} = -z\frac{c_{12}}{c_{11}}G; \quad u_{12} = u_{23} = u_{13} = 0$$

$$\Phi = \frac{\chi_{33}^{-1}}{2}hP^2 + \frac{D_s}{2}G^2 - 2hPG(f_{1133} - \frac{c_{12}}{c_{11}}f_{1111}).$$

$$D_s = \frac{h^3}{6} \cdot \frac{c_{11}^2 + c_{11}c_{12} - 2c_{12}^2}{c_{11}}$$

$$G = \frac{2h}{D_s}\mu_{pl}E; \qquad D = P = 2\mu_{pl}G; \qquad \mu_{pl} = \chi_{33}\frac{c_{11}f_{1133} - c_{12}f_{1111}}{c_{11}}$$

2. А.С.Юрков, Письма в ЖЭТФ **94**, 490 (2011)

Нет уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij} = 0$$

Есть только дифференциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Для дифференциальных уравнений нужны граничные условия.

При наличии флексоэффекта и не нулевой поляризации на поверхности **обычные упругие граничные условия**

$$\sigma_{ij} n_j = 0$$

не верны. В модифицированные флексоэффектом упругие граничные условия входит сама поляризация на поверхности, а не только ее градиент .

Из А.С.Юрков, Письма в ЖЭТФ **94**, 490 (2011)

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$F_1 = \int \frac{1}{2} c_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV \,,$$

$$F_2 = \int \frac{1}{2} f_{ijkl} (P_{i,j} u_{k,l} - P_i u_{k,l,j}) dV \,,$$

$$F_3 = \int \frac{1}{2} v_{ijklnm} u_{i,j,n} u_{k,l,m} dV \,,$$

$$(\ldots)_{,i} = \partial(\ldots)/\partial x_i$$

$$\delta F_1 = \oint c_{ijkl} u_{i,j} \delta u_k n_l dS - \int c_{ijkl} u_{i,j,l} \delta u_k dV \ ,$$

$$\delta F_2 = \oint f_{ijkl} P_{i,j} \delta u_k n_l dS - \frac{1}{2} \oint f_{ijkl} P_i \delta u_{k,l} n_j dS -$$
$$- \int f_{ijkl} P_{i,j,l} \delta u_k dV \ ,$$

$$\delta F_3 = \oint v_{ijklnm} u_{i,j,n} \delta u_{k,l} n_m dS -$$
$$- \oint v_{ijklnm} u_{i,j,n,m} \delta u_k n_l dS + \int v_{ijklnm} u_{i,j,n,m,l} \delta u_k dV \ ,$$

$$\sigma_{kl,l} = 0$$

$$\sigma_{kl} = c_{klij} u_{i,j} + f_{klij} P_{i,j} - v_{ijklnm} u_{i,j,n,m} \,.$$

$$\oint \sigma_{km} \delta u_k n_m dS + \oint \theta_{klm} \delta u_{k,l} n_m dS = 0 \,,$$

$$\theta_{klm} = v_{ijklnm} u_{i,j,n} - \frac{1}{2} f_{imkl} P_i \,.$$

$$dr_i = e_{i(a)} dx^{(a)}$$

$$n_i dS = \varepsilon_{ijk} dr_j^{(1)} dr_k^{(2)}$$

$$g_{(a)(b)} = e_{i(a)} e_{i(b)}$$

$$dS = \sqrt{g} d^2 x$$

$$e_i^{(a)} = g^{(a)(b)} e_{i(b)}$$

$$n_i = g^{-1/2} \varepsilon_{ijk} e_{j(1)} e_{k(2)}$$

$$e_i^{(a)} e_{i(b)} = \delta_{(b)}^{(a)}$$

$$g = \det g_{(a)(b)}$$

$$g^{(a)(b)} = e_i^{(a)} e_i^{(b)}$$

$$dA_{\dots} = A_{\dots,i} dr_i$$

$$\tau_i = e_i^{(a)} e_{j(a)} \tau_j$$

$$dA_{\dots} = A_{\dots,i} e_{i(a)} dx^{(a)}$$

$$e_i^{(a)} e_{j(a)} = \delta_{ij} - n_i n_j$$

$$A_{\dots,(a)} = A_{\dots,i} e_{i(a)}$$

$$\oint \theta_{klm}\delta u_{k,l} n_m dS = \oint \theta_{kim}\delta_{ij}\delta u_{k,j} n_m dS$$

$$\delta_{ij} = e_i^{(a)} e_{j(a)} + n_i n_j$$

$$\oint \theta_{klm}\delta u_{k,l} n_m dS = \oint \theta_{kim}\delta u_{k,j} n_i n_j n_m dS + \oint \theta_{kim}\delta u_{k,j} e_{j(a)} e_i^{(a)} n_m dS =$$

$$= \oint \theta_{kim}\delta u_{k,j} n_i n_j n_m dS + \oint \theta_{kim}\delta u_{k,(a)} e_i^{(a)} n_m \sqrt{g} d^2x$$

$$\oint \theta_{klm}\delta u_{k,l}n_m dS = \oint \theta_{klm}\delta u_{k,j}n_j n_l n_m dS + \oint \theta_{klm,j}n_j n_l n_m \delta u_k dS -$$

$$- \oint \theta_{klm,l}n_m \delta u_k dS - \oint \theta_{klm}\gamma_{lm}\delta u_k dS$$

$$\gamma_{lm} = (e_l^{(a)} n_m \sqrt{g})_{,(a)} g^{-1/2}$$

В результате получаем граничные условия:

$$\theta_{klm}n_l n_m|_S = 0$$

$$\sigma_{km}n_m + \theta_{klm,j}n_j n_l n_m - \theta_{klm,l}n_m - \theta_{klm}\gamma_{lm}\Big|_S = 0$$

В граничные условия входит не только градиент поляризации, но и сама поляризация т.к.

$$\theta_{klm} = v_{ijklnm}u_{i,j,n} - \frac{1}{2}f_{imkl}P_i\,.$$

Как в граничных условиях проявляется необходимость высшей упругости.

Пусть $z = \zeta(x,y)$ – уравнение поверхности, координатную же сетку на поверхности образуем путем проецирования вдоль оси OZ декартовой координатной сетки на плоскости OXY. При этом $x^{(1)}$ это фактически декартова координата x, а $x^{(2)}$ – декартова координата y. Тогда

$$\mathbf{e}_{(1)} = \{1, 0, \zeta_{,x}\},$$

$$\mathbf{e}_{(2)} = \{0, 1, \zeta_{,y}\}.$$

Для точки поверхности, где ось OZ декартовой системы координат перпендикулярна этой поверхности:

$$\sigma_{kz} - \theta_{k\alpha z,\alpha} + \theta_{k\beta\alpha}\zeta_{,\alpha,\beta} = 0,$$

$$\theta_{kzz} = 0.$$

Предельный переход $v_{ijklnm} \to 0$ сингулярен. Если расписать $\theta_{kzz} = 0$ как $v_{ijkznz}u_{i,j,n} - (f_{izkz}P_i)/2 = 0$, то понятно, что при конечном втором слагаемом и $v_{ijkznz} \to 0$ получается $u_{i,j,n} \to \infty$.

Флексоэлектрическая деформация шара в однородном внешнем поле

A.S. Yurkov. ArXiv:1304.1868 [cond-mat.mtrl-sci] (2013)

$$F = F_{el} + F_p + F_{flx}\,,$$

$$F_{el} = \int \left(\frac{1}{2} v^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} u_{\alpha;\beta;\varepsilon} u_{\gamma;\delta;\zeta} + \frac{1}{2} c^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha;\beta} u_{\gamma;\delta}\right) \sqrt{g} d^3x\,,$$

$$F_p = \int \left(\frac{1}{2} a^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta + \frac{1}{2} b^{\alpha\beta\gamma\delta} P_{\alpha;\beta} P_{\gamma;\delta} - E^\alpha P_\alpha\right) \sqrt{g} d^3x\,,$$

$$F_{flx} = \int \frac{1}{2} f^{\alpha\beta\gamma\delta} (P_{\alpha;\beta} u_{\gamma;\delta} - P_\alpha u_{\gamma;\delta;\beta}) \sqrt{g} d^3x\,.$$

Ковариантный формализм

$$e_{i\alpha} = \partial r_i / \partial x^\alpha = r_{i,\alpha}\,, \qquad e_i^\alpha e_{i\beta} = \delta_\beta^\alpha\,,$$

$$(dr)^2 = dr_i dr_i = e_{i\alpha} e_{i\beta} dx^\alpha dx^\beta\,, \qquad g_{\alpha\beta} = e_{i\alpha} e_{i\beta}\,,$$

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = A_{i_1 \ldots i_n} e_{i_1 \alpha_1} \ldots e_{i_n \alpha_n}\,,$$

$$A^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = A_{i_1 \ldots i_n} e_{i_1}^{\alpha_1} \ldots e_{i_n}^{\alpha_n}\,,$$

$$(\ldots)_{,i} \to (\ldots)_{;\alpha}\,, \qquad A_{\alpha;\beta} = A_{\alpha,\beta} - A_\delta \Gamma^\delta_{\alpha\beta}\,,$$

$$A_{\alpha\beta;\gamma} = A_{\alpha\beta,\gamma} - A_{\delta\beta} \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} - A_{\alpha\delta} \Gamma^\delta_{\beta\gamma}\,,$$

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = e_i^\gamma e_{i\alpha,j} e_{j\beta} = e_i^\gamma e_{i\alpha,\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (g_{\delta\alpha,\beta} + g_{\delta\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\delta})\,.$$

Сферическая координатная система

$$r_x = r \sin\theta \cos\psi\,, \quad r_y = r \sin\theta \sin\psi\,, \quad r_z = r\cos\theta\,,$$

$$x^1 = \psi\,, \quad x^2 = \theta\,, \quad x^3 = r\,,$$

$$g_{\psi\psi} = r^2 \sin^2\theta\,, \quad g_{\theta\theta} = r^2\,, \quad g_{rr} = 1\,,$$

$$\Gamma^{\psi}_{\psi\theta} = \Gamma^{\psi}_{\theta\psi} = \operatorname{ctg}\theta\,, \qquad \Gamma^{\psi}_{\psi r} = \Gamma^{\psi}_{r\psi} = r^{-1}\,,$$

$$\Gamma^{\theta}_{\psi\psi} = -\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \Gamma^{\theta}_{r\theta} = r^{-1}\,,$$

$$\Gamma^{r}_{\psi\psi} = -r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r\,.$$

Уравнения равновесия поляризации в объеме:

$$a^{\alpha\beta}P_{\beta} - b^{\alpha\beta\gamma\delta}P_{\gamma;\delta;\beta} - E^{\alpha} - f^{\alpha\beta\gamma\delta}u_{\gamma;\delta;\beta} = 0\,.$$

Граничные условия к этим уравнениям:

$$\left(b^{\alpha\beta\gamma\delta}P_{\gamma;\delta}n_{\beta} + \frac{1}{2}f^{\alpha\beta\gamma\delta}u_{\gamma;\delta}n_{\beta}\right)_S = 0\,.$$

Упругие уравнения равновесия:

$$\sigma^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0\,,$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta\gamma\delta}u_{\gamma;\delta} + f^{\gamma\delta\alpha\beta}P_{\gamma;\delta} - v^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta}u_{\gamma;\delta;\zeta;\varepsilon}\,.$$

Граничные условия к уравнениям упругого равновесия в специальной системе криволинейных координат, в которых уравнение поверхности имеет вид $x^3 = \mathrm{const}$:

$$\Theta^{\alpha\beta\gamma} n_\beta n_\gamma = 0\,.$$

$$\sigma^{\alpha\gamma} n_\gamma - \Theta^{\alpha\beta\gamma}{}_{;\beta} n_\gamma + \Theta^{\alpha\beta\gamma}{}_{;\delta} n^\delta n_\beta n_\gamma - \Theta^{\alpha\beta\gamma} \gamma_{\beta\gamma} = 0\,.$$

$$\gamma_{\beta\gamma} = \Gamma^{\varepsilon}_{\gamma\delta} n^\delta n_\beta n_\varepsilon + \Gamma^{\varepsilon}_{\beta\delta} n^\delta n_\varepsilon n_\gamma - \Gamma^{\delta}_{\gamma\beta} n_\delta\,.$$

Можно показать, что тензор $\gamma_{\beta\gamma}$ симметричен и совпадает с преобразованием к криволинейным координатам аналогичного тензора, выведенного в предыдущей работе.

Уравнение Пуассона для электрического потенциала:

$$g^{\alpha\beta}\phi_{;\alpha;\beta} = -4\pi\rho\,,$$

$$\rho = -g^{\alpha\beta}P_{\alpha;\beta}$$

$$g^{\alpha\beta}\phi_{;\alpha;\beta} = 4\pi g^{\alpha\beta}P_{\alpha;\beta}\,.$$

Граничные условия к этому уравнению обычным образом связывают скачок производной потенциала с поляризацией на поверхности.

Для сферы из изотропного материала переменные можно разделить путем разложения по сферическим векторам, которые в ковариантном формализме имеют вид:

$$Y^{(1)}_{lm|\theta} = (Y_{lm})_{,\theta}$$

$$Y^{(1)}_{lm|\psi} = imY_{lm}$$

$$Y^{(2)}_{lm|\theta} = \frac{-im}{\sin\theta} Y_{lm}$$

$$Y^{(2)}_{lm|\psi} = \sin\theta (Y_{lm})_{,\theta}$$

$$Y^{(3)}_{lm|\rho} = Y_{lm}$$

Остальные компоненты нулевые.

Если электрическое поле при $r \to \infty$ однородно и направлено по полярной оси, то ''выживают'' только слагаемые с $l = 1$, $m = 0$. $Y_{10} \sim \cos\theta$ и тогда можно записать проще:

$$\begin{aligned}
&u_r = f_1(r)\cos\theta \\
&u_\theta = -rf_2(r)\sin\theta \\
&P_r = f_3(r)\cos\theta \\
&P_\theta = -rf_4(r)\sin\theta \\
&\phi = f_5(r)\cos\theta\,.
\end{aligned}$$

В итоге задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Множитель r введен в θ-компоненты для того, чтобы соответствующие функции были аналитичны в нуле.

Упрощенный вариант: однородно поляризованный шар

$$v_3(\xi^4 f_1'''' + 4\xi^3 f_1''' - 8\xi^2 f_1'' + 16 f_1) + v_3(8\xi^2 f_2'' - 16 f_2)+$$

$$+v_4(\xi^4 f_1'''' + 4\xi^3 f_1''' - 6\xi^2 f_1'' + 12 f_1) - v_4(2\xi^3 f_2''' - 2\xi^2 f_2'' - 4\xi f_2' + 12 f_2) =$$

$$= c_{44}\xi^2(2\xi^2 f_1'' + 4\xi f_1' - 6 f_1) - c_{44}\xi^2(2\xi f_2' - 6 f_2)+$$

$$+c_{12}\xi^2(\xi^2 f_1'' + 2\xi f_1' - 2 f_1) - c_{12}\xi^2(2\xi f_2' - 2 f_2)\,.$$

$$v_3(\xi^4 f_2'''' + 4\xi^3 f_2''' - 4\xi^2 f_2'' + 8 f_2) + v_3(4\xi^2 f_1'' - 8 f_1) - v_4(2\xi^2 f_2'' - 4 f_2)+$$

$$+v_4(\xi^3 f_1''' + 4\xi^2 f_1'' - 2\xi f_1' - 4 f_1) = c_{44}\xi^2(\xi^2 f_2'' + 2\xi f_2' - 4 f_2)+$$

$$+c_{44}\xi^2(\xi f_1' + 4 f_1) - c_{12}\xi^2 2 f_2 + c_{12}\xi^2(\xi f_1' + 2 f_1)\,.$$

$$r = R\xi; \qquad v_3 = (v_1 + 2v_2)R^{-2}; \qquad v_4 = (8v_1 + 4v_2)R^{-2}$$

$$v_1 = \frac{1}{6}v_{111111} - \frac{1}{2}v_{121211}; \quad v_2 = \frac{3}{4}v_{121211} - \frac{1}{12}v_{111111}\,.$$

Граничных условий четыре:

$$2v_1(f_2''' + f_2'' - 18f_2' + 34f_2 + 8f_1'' + 14f_1' - 34f_1) + 2v_2(2f_2''' + 2f_2'' -$$

$$-20f_2' + 36f_2 + 4f_1'' + 16f_1' - 36f_1) - 2c_{44}R^2(f_2' - f_2 + f_1) = f_{12}R^2P\,,$$

$$R^2[c_{12}(2f_1 - 2f_2) + (c_{12} + 2c_{44})f_1'] - v_1(9f_1''' + 18f_1'' - 46f_1' + 36f_1 -$$

$$-14f_2'' + 32f_2' - 36f_2) - 2v_2(3f_1''' + 6f_1'' - 22f_1' + 28f_1 -$$

$$-2f_2'' + 16f_2' - 28f_2) = R^2f_{12}P\,,$$

$$(18v_1 + 12v_2)f_1'' + 12v_1(3f_1' - 4f_1 - 2f_2' + 4f_2) = (f_{12} + 2f_{44})R^2P\,,$$

$$2v_1(f_2'' + 2f_2' - 6f_2 + 2f_1' + 6f_1) + 4v_2(f_2'' - 2f_2' + 2f_2 + 2f_1' - 2f_1) =$$

$$= f_{44}R^2P\,.$$

Граничных условий не достаточно. Но недостающие условия заменяются условиями аналитичности в нуле. В соответствии с этим представляем решение в виде степенных рядов:

$$f_i(r) = \sum_n a_{in}\xi^n$$

Подстановка в уравнения дает:

$$\begin{aligned}
&[v_3(n^4 - 2n^3 - 9n^2 + 10n + 16) + v_4(n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 8n + 12)]a_{1\,n} + \\
&+[v_3(8n^2 - 8n - 16) - v_4(2n^3 - 8n^2 + 2n + 12)]a_{2\,n} = \\
&= [c_{44}(2n^2 - 6n - 2) + c_{12}(n^2 - 3n)]a_{1\,n-2} - \\
&-[c_{44}(2n - 10) + c_{12}(2n - 6)]a_{2\,n-2}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[v_3(4n^2 - 4n - 8) + v_4(n^3 + n^2 - 4n - 4)]a_{1\,n} + \\
&+[v_3(n^4 - 2n^3 - 5n^2 + 6n + 8) - v_4(2n^2 - 2n - 4)]a_{2\,n} = \\
&= [c_{44}(n + 2) + c_{12}n]a_{1\,n-2} + [c_{44}(n^2 - 3n - 2) - c_{12}2]a_{2\,n-2}\,.
\end{aligned}$$

Система уравнений определяет не все коэффициенты. Неопределенность должна устраняться с помощью граничных условий. Но можно поступрить проще: определить независимый набор решений дифференциальных уравнений $\mathcal{B}_{ki}$ и представить решение в виде их линейной комбинации:

$$f_i(\xi) = \sum_k C_k \mathcal{B}_{ki}(\xi)$$

При этом коэффициенты определяются из граничных условий.

Если исключить физически бессодержательную трансляцию шара по оси z, то независимых базисных функций оказывается как раз четыре, по числу граничных условий, причем одна из них может быть выбрана в виде обрывающегося ряда (не равны нулю только квадратичные по ξ члены).

$$
\begin{cases}
\mathcal{B}_1 : \\
a_{12} = 1\,, \quad a_{22} = \dfrac{3c_{44} + 2c_{12}}{c_{12} - c_{44}} a_{12}\,,
\end{cases}
$$

все остальные коэффициенты нулевые.

$$
\begin{cases}
\mathcal{B}_2 : \\
a_{12} = 1\,, \quad a_{22} = \dfrac{3c_{44} + 2c_{12}}{c_{44} - c_{12}} a_{12}\,, \\
a_{24} = 0\,, \\
(40v_3 + 60v_4)a_{14} = \\
= (6c_{44} + 4c_{12})a_{12} + (2c_{44} - 2c_{12})a_{22}\,,
\end{cases}
$$

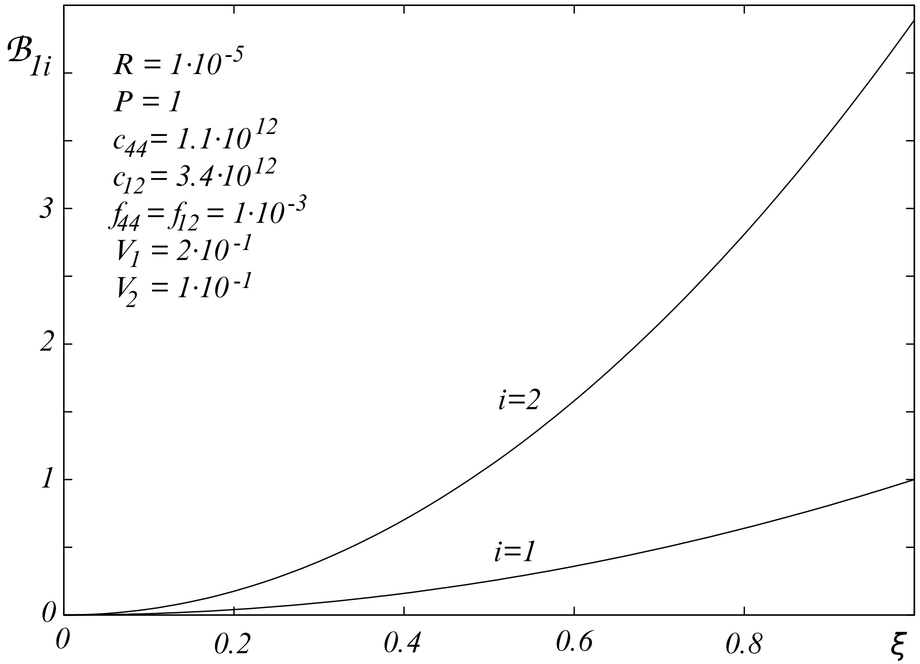
линейные и кубичные члены нулевые, для $n = 5$ и больше коэффициенты вычисляются по общему алгоритму.

$$\begin{cases} \mathcal{B}_3 : \\ a_{11} = 1\,, \quad a_{21} = \dfrac{4v_3 + 3v_4}{4v_3 + 2v_4} a_{11}\,, \end{cases}$$

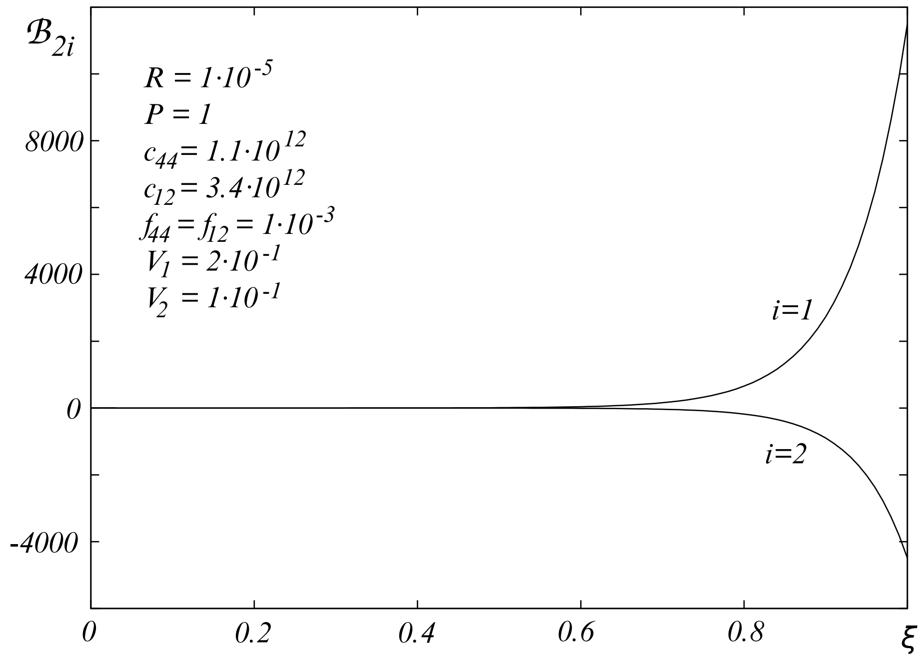
квадратичные члены нулевые, кубичные вычисляются по общему алгоритму, члены четвертой степени нулевые.

$$\begin{cases} \mathcal{B}_4 : \\ a_{14} = 1\,, \quad a_{24} = \dfrac{2v_3 + 3v_4}{v_4 - 4v_3} a_{14}\,, \end{cases}$$

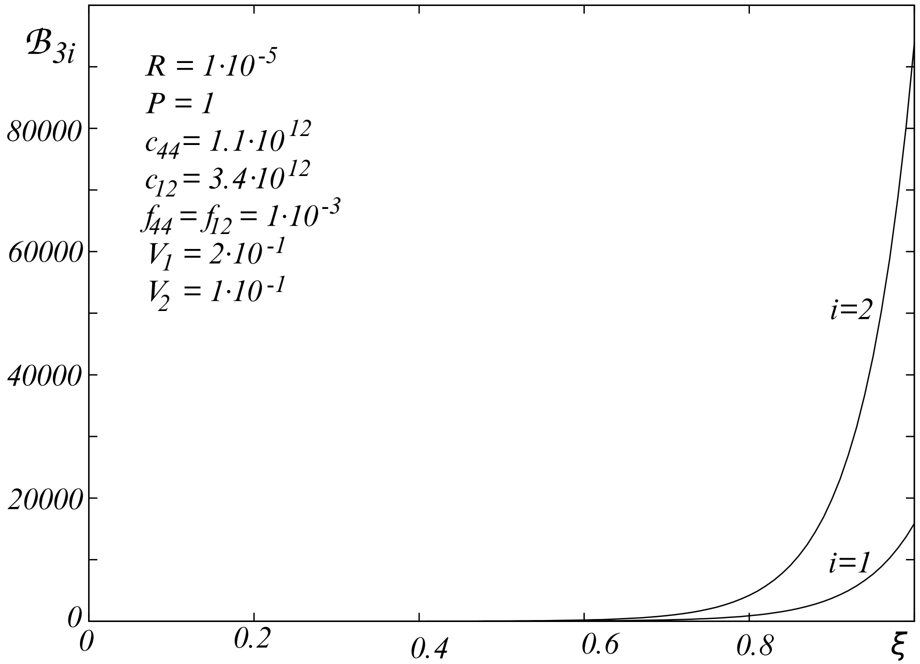
Линейные, квадратичные и кубичные члены нулевые, для $n > 4$ вычисления по общему алгоритму.



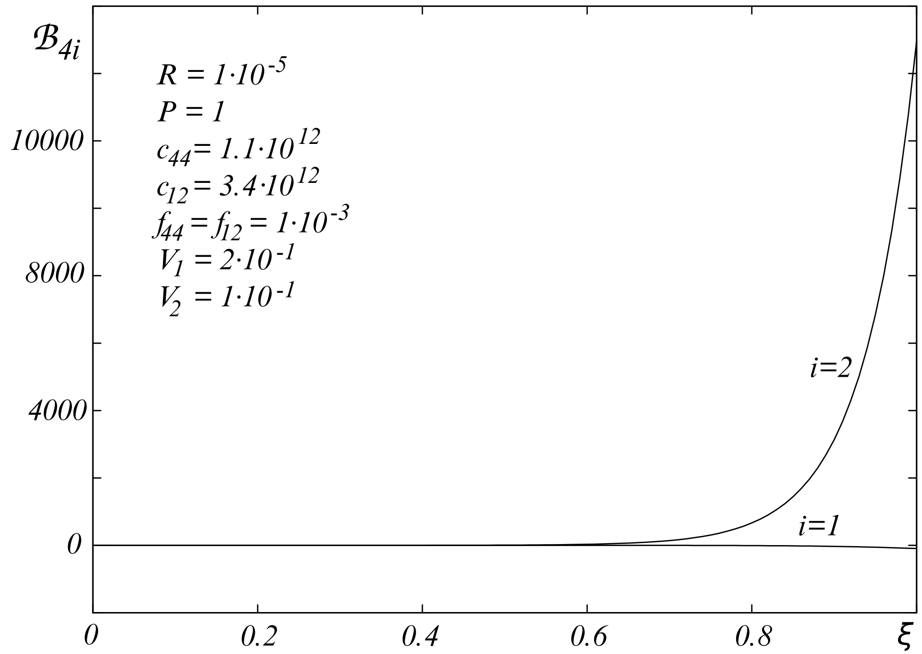
Базисная функция $\mathcal{B}_{1i}$.



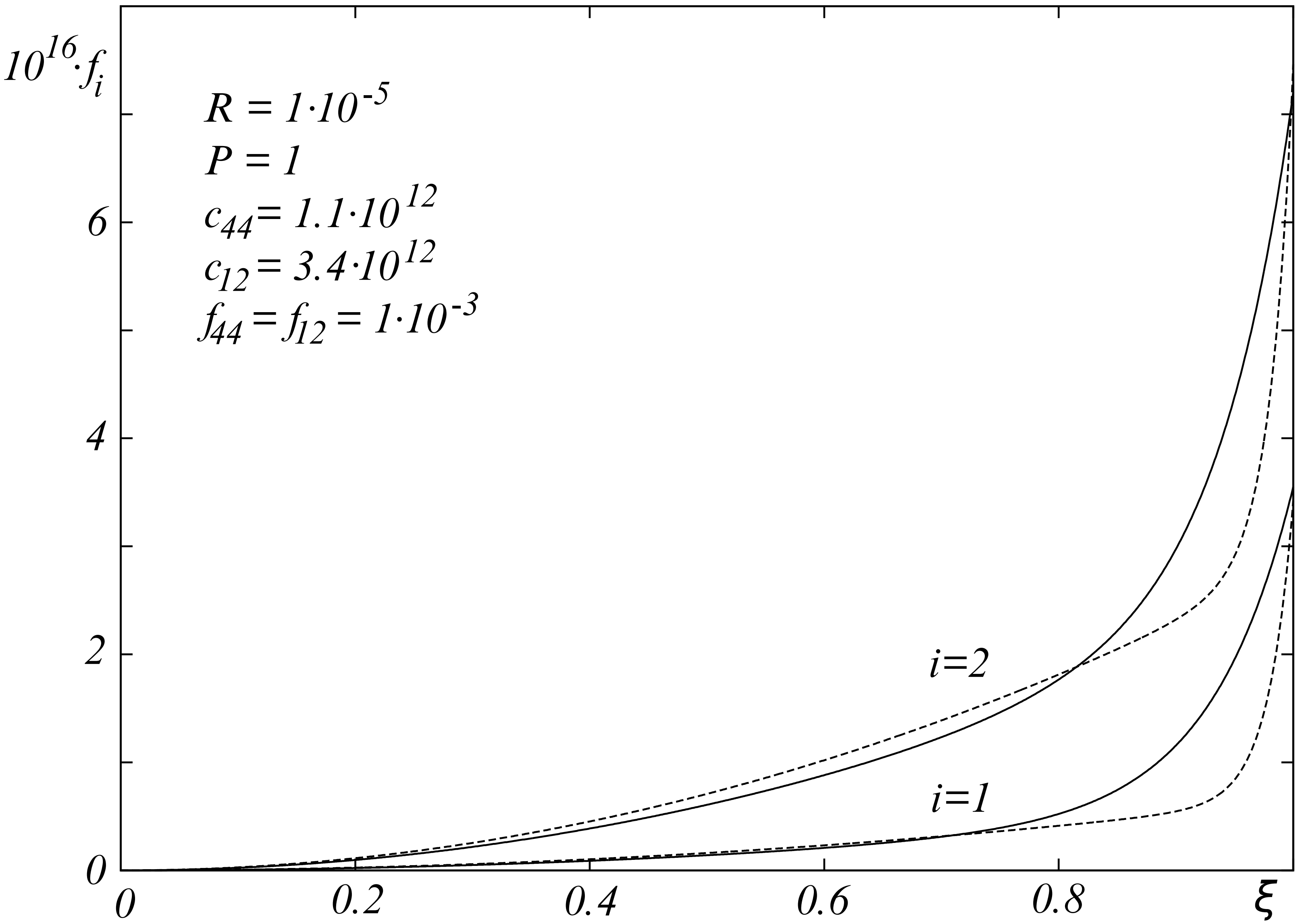
Базисная функция $\mathcal{B}_{2i}$.



Базисная функция $\mathcal{B}_{3i}$.



Базисная функция $\mathcal{B}_{4i}$.



Результат расчета, упругие смещения. Сплошная линия – при $v_1 = 2 \cdot 10^{-1}$, $v_2 = 1 \cdot 10^{-1}$; пунктирная – при $v_1 = 2 \cdot 10^{-2}$, $v_2 = 1 \cdot 10^{-2}$.

Приближенный метод описания флексоэлектрических деформаций конечных тел

A.S. Yurkov, JETP Letters **99**, 214 (2014).

$$c^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma;\delta;\beta} + f^{\gamma\delta\alpha\beta} P_{\gamma;\delta;\beta} - v^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} u_{\gamma;\delta;\zeta;\varepsilon;\beta} = 0\,,$$

Подстановка $u_\gamma = \tilde{u}_\gamma + \hat{u}_\gamma$ при условии, что $\tilde{u}$ удовлетворяет классическому уравнению:

$$c^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma;\delta;\beta} + f^{\gamma\delta\alpha\beta} P_{\gamma;\delta;\beta} = 0\,.$$

Тогда неклассическая часть $\hat{u}$ удовлетворяет такому уравнению:

$$c^{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{u}_{\gamma;\delta;\beta} - v^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} \hat{u}_{\gamma;\delta;\zeta;\varepsilon;\beta} = v^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} \tilde{u}_{\gamma;\delta;\zeta;\varepsilon;\beta}\,.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$v^{\alpha 3\varepsilon\delta 3\zeta}\widehat{u}_{\varepsilon;\delta;\zeta} = \frac{1}{2}f^{\delta 3\alpha 3}P_{\delta} - v^{\alpha 3\varepsilon\delta 3\zeta}\widetilde{u}_{\varepsilon;\delta;\zeta}\,,$$

$$c^{\alpha 3\gamma\delta}\widetilde{u}_{\gamma;\delta} + f^{\gamma\delta\alpha 3}P_{\gamma;\delta} - v^{\alpha 3\gamma\delta\varepsilon\zeta}\widetilde{u}_{\gamma;\delta;\zeta;\varepsilon} - v^{\alpha(\beta)\varepsilon\delta 3\zeta}\widetilde{u}_{\varepsilon;\delta;\zeta;(\beta)}+$$

$$+\frac{1}{2}f^{\delta 3\alpha(\beta)}P_{\delta;(\beta)} + v^{\alpha(\beta)\varepsilon\delta(\gamma)\zeta}\widetilde{u}_{\varepsilon;\delta;\zeta}\Gamma^{3}_{(\beta)(\gamma)}-$$

$$\frac{1}{2}f^{\delta(\gamma)\alpha(\beta)}P_{\delta}\Gamma^{3}_{(\beta)(\gamma)} + c^{\alpha 3\gamma\delta}\widehat{u}_{\gamma;\delta} - v^{\alpha 3\gamma\delta\varepsilon\zeta}\widehat{u}_{\gamma;\delta;\zeta;\varepsilon} - v^{\alpha(\beta)\varepsilon\delta 3\zeta}\widehat{u}_{\varepsilon;\delta;\zeta;(\beta)}+$$

$$v^{\alpha(\beta)\varepsilon\delta(\gamma)\zeta}\widehat{u}_{\varepsilon;\delta;\zeta}\Gamma^{3}_{(\beta)(\gamma)} = 0\,.$$

В главном приближении по малости высших упругих модулей дифференциальные уравнения на неклассическую часть упругих смещений можно упростить:

$$c^{\alpha 3\gamma 3}\widehat{u}_{\gamma,3,3} - v^{\alpha 3\gamma 333}\widehat{u}_{\gamma,3,3,3,3} = 0\,,$$

Граничные условия также упрощаются:

$$v^{\alpha 3\varepsilon 333}\widehat{u}_{\varepsilon,3,3} = \frac{1}{2}f^{\delta 3\alpha 3}P_{\delta}\,.$$

Дополнительно нужно наложить условия (экспоненциально) быстрого затухания вдали от поверхности. Тем самым из $\widehat{u}_i$ исключается классическая часть смещений.

Фундаментальные решения дифференциального уравнения:

$$\hat{u}_\gamma = \bar{u}_\gamma e^{\lambda(x^3 - x_S^3)}$$

$$\lambda^2 c^{\alpha 3 \gamma 3} \bar{u}_\gamma = \lambda^4 v^{\alpha 3 \gamma 333} \bar{u}_\gamma \,.$$

Требование затухания вдали от поверхности исключает случай $\lambda = 0$. Так что

$$c^{\alpha 3 \gamma 3} \bar{u}_\gamma = \lambda^2 v^{\alpha 3 \gamma 333} \bar{u}_\gamma \,.$$

Общее решение — линейная комбинация фундаментальных:

$$\widehat{u}_\gamma = \sum_{n=1}^{3} a_n \bar{u}^n_\gamma e^{\lambda_n (x^3 - x^3_S)}\,,$$

Коэффициенты определяются из граничных условий, что дает простую СЛАУ:

$$\sum_{n=1}^{3} \lambda_n^2 v^{\alpha 3 \gamma 333} \bar{u}^n_\gamma a_n = \frac{1}{2} f^{\delta 3 \alpha 3} P_\delta\,.$$

Эквивалентная СЛАУ с учетом уравнения на собственные значения:

$$\sum_{n=1}^{3} c^{\alpha 3 \gamma 3} \bar{u}^n_\gamma a_n = \frac{1}{2} f^{\delta 3 \alpha 3} P_\delta\,.$$

Таким образом, неклассическая часть смещений $\hat{u}$ находится явно простым расчетом, причем при этом используется лишь половина граничных условий. Остается подставить найденные $\hat{u}$ в оставшиеся граничные условия, это даст граничные условия к классическим уравнениям.

Однако возникает сингулярность: возникают члены, расходящиеся при $v \to 0$. Хотя эти члены и сокращаются, необходимо учесть поправки к этим членам. Малая поправка, умноженная на большой коэффициент не обязательно мала. Вычисления удается провести до конца в общем виде.

Граничные условия к дифференциальным уравнениям на классическую часть смещений:

$$c^{\alpha 3\gamma\delta}\tilde{u}_{\gamma;\delta} = s^{\alpha} - f^{\gamma\delta\alpha 3}P_{\gamma;\delta} - \frac{1}{2}f^{\delta 3\alpha(\beta)}P_{\delta;(\beta)} + \frac{1}{2}f^{\delta(\gamma)\alpha(\beta)}P_{\delta}\Gamma^{3}_{(\beta)(\gamma)}\,,$$

$$s^{\alpha} = c^{\alpha(\beta)\gamma 3}\widehat{u}_{\gamma,(\beta)} - c^{\alpha\beta\gamma\delta}\Gamma^{3}_{\delta\beta}\widehat{u}_{\gamma} - c^{\alpha\beta\gamma 3}\Gamma^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\widehat{u}_{\varepsilon} - h^{\alpha\beta}\widehat{u}_{\beta,3,3}\,,$$

$$h^{\alpha\beta} = v^{\alpha(\gamma)\beta 3(\delta)3}\Gamma^{3}_{(\gamma)(\delta)} - v^{\alpha 3\gamma 333}\Gamma^{\beta}_{\gamma 3} - 2v^{\alpha 3\beta\delta 33}\Gamma^{3}_{\delta 3} - v^{\alpha\varepsilon\beta 3\delta 3}\Gamma^{3}_{\delta\varepsilon}\,.$$

По форме это ничто иное, как классические упругие граничные условия для тела, на поверхность которого действуют внешние силы. Так что классическая часть задачи оказывается совершенно стандартной.

Сравнение с точным решением для шара

А.С. Юрков. В кн.: Физика Диэлектриков–2014. Материалы международной конференции. (2014)

$$f_i = \tilde{f}_i + \hat{f}_i \,,$$

$$\hat{f}_1 = \frac{f_{12} + 2f_{44}}{2(c_{12} + 2c_{44})} P e^{\lambda_r R(\xi - 1)} \,,$$

$$\hat{f}_2 = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{f_{44}}{2c_{44}} P e^{\lambda_\theta R(\xi - 1)} \,,$$

$$\tilde{f}_1 = \frac{P(c_{12}f_{44} - c_{44}f_{12})(c_{12} - c_{44})}{c_{44}(c_{12} + 2c_{44})(3c_{12} + 2c_{44})} \cdot \xi^2 \,,$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{P(c_{12}f_{44} - c_{44}f_{12})(2c_{12} + 3c_{44})}{c_{44}(c_{12} + 2c_{44})(3c_{12} + 2c_{44})} \cdot \xi^2 \,,$$

$$\lambda_r = \sqrt{c_{44}/(v_1 + 2v_2)} \,,$$

$$\lambda_\theta = \sqrt{(c_{12} + 2c_{44})/(9v_1 + 6v_2)} \,,$$

$$\xi = r/R \,.$$